ENSA-ALHOCEIMA | **ANALYSE 4**
CP II. | **SEMESTRE 2**
F.MORADI

Exercice 1 :

a. *Calculons la limite de la suite :* $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n x dx$

Posons pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: $f_n(x) = tan^n x.$

Il est clair que:

i. *la suite* $\left(f_n(x)\right)_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Et comme : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$: $|tanx| < 1$ et $tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, *alors:*

ii. *la suite* $\left(f_n(x)\right)_n$ *converge simplement vers la fonction:*

$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\\ 1 & si \quad x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ *qui est une fonction continue par morceaux.*

iii. *De plus,* $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$: $|f_n(x)| \leq 1 = g(x)$ *avec g est continue et intégrable sur* $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Donc, d'après (i), (ii), (iii) et le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} lim_{n\to+\infty}\left(f_n(x)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 0dx = 0$$

b. *Calculons la limite de la suite :* $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx$

Posons $(\forall x \in [0, +\infty[)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$: $f_n(x) = \frac{1}{x^n + e^x}$.

On a:

i. *la suite* $\left(f_n(x)\right)_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $[0, +\infty[$.

ii. *la suite* $\left(f_n(x)\right)_n$ *converge simplement vers la fonction:*

$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x \in [0,1[\\ \frac{1}{1+e} & si \quad x = 1 \\ 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$ *qui est une fonction continue par morceaux sur* $[0, +\infty[$.

iii. *De plus,* $(\forall x \in [0,+\infty[)\ (\forall n \in \mathbb{N})$: $|f_n(x)| \leq e^{-x} = g(x)$ *avec* g *est continue et intégrable sur* $[0,+\infty[$.

Donc, d'après (i), (ii), (iii) et le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} 0dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$$

c. *Calculons la limite de la suite:* $w_n = \int_0^{+\infty} \frac{sin^n x}{x^2}dx$

Posons $g_n(x) = \frac{sin^n x}{x^2}$, $\quad pour\ x \in]0,+\infty[\ \ et\ \ n \in \mathbb{N}.$

On a:

i. *la suite* $\left(g_n(x)\right)_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $]0,+\infty[$.

ii. *la suite* $\left(g_n(x)\right)_n$ *converge simplement vers la fonction:*

$$g(x) = \begin{cases} 0 \qquad si\quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[, tel\ que\quad k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)^2} \qquad si\quad x = \frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad tel\ que\quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

qui est une fonction continue par morceaux sur $]0,+\infty[\setminus \left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k \in \mathbb{N}\right\}$.

iii. *Pour la condition de domination, on écrit*

$w_n = a_n + b_n$ *telles que:* $a_n = \int_0^{\delta} \frac{sin^n x}{x^2}dx$ *et* $b_n = \int_{\delta}^{+\infty} \frac{sin^n x}{x^2}dx$ *avec* δ *est une constante à déterminer.*

On sait que $lim_{x\to 0}\frac{sin^2 x}{x^2} = 1$, *donc pour* $\varepsilon > 0$,

$$\exists 0 < \delta < \frac{\pi}{2}\ \ tel\ que: |x| \leq \delta \Longrightarrow \left|\frac{sin^2 x}{x^2} - 1\right| \leq \varepsilon \Longrightarrow \frac{sin^2 x}{x^2} \leq 1 + \varepsilon$$

Par suite,

$(\forall n \geq 2)(\forall x \in]0,\delta]): |g_n(x)| \leq (1+\varepsilon)|sin^{n-2}x| \leq 1 + \varepsilon = h_1(x)$ *avec* h_1 *est continue et intégrable sur* $]0,\delta]$.

De plus, $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [\delta,+\infty[): |g_n(x)| \leq \frac{1}{x^2} = h_2(x)$ *avec* h_2 *est continue et intégrable sur* $[\delta,+\infty[$ *(puisque* $\int_{\delta}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\delta}^{+\infty} = \frac{1}{\delta}$*)*

Donc, d'après (i), (ii), (iii) et le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$lim_{n\to+\infty}a_n = \int_0^{\delta} g(x)dx = 0$ et $lim_{n\to+\infty}b_n = \int_{\delta}^{+\infty} g(x)dx = 0$

Finalement, $lim_{n\to+\infty}w_n = 0.$

d. *Calculons la limite de* $z_n = \int_0^{+\infty} \frac{n\cos x}{1+n^2x^2}dx$

En utilisant le changement de variables $t = nx$, *on obtient:*

$dt = ndx$ et $\begin{cases} x = 0 \\ x \to +\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t \to +\infty \end{cases}$

Par suite, $z_n = \int_0^{+\infty} \frac{cos\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}dt$

Posons $(\forall t \in [0, +\infty[)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $f_n(t) = \frac{cos\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}$.

On a:

i. *la suite* $(f_n(t))_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $[0, +\infty[$.

ii. *la suite* $(f_n(t))_n$ *converge simplement vers la fonction:*

$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ *qui est une fonction continue sur* $[0, +\infty[$.

iii. *De plus,* $(\forall t \in [0, +\infty[)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $|f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = g(t)$ *avec g est continue et intégrable sur* $[0, +\infty[$.

Donc, d'après (i), (ii), (iii) et le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty}z_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = [Arctant]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

e. *Calculons la limite de* $t_n = n\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx$

Comme précédemment, en utilisant le changement de variables $t = nx$, *on obtient:*

$$t_n = \int_0^{n} \frac{e^{-t}}{1+\frac{t}{n}}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+\frac{t}{n}}.\mathcal{X}_{[0,n]}(t)dt$$

Avec $\mathcal{X}_{[0,n]}$ *est la fonction indicatrice de* $[0, n]$ *définie par:*

$$\mathcal{X}_{[0,n]}(t) = \begin{cases} 1 & si\quad t \in [0, n] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Posons $(\forall t \in [0, +\infty[)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $g_n(t) = \frac{e^{-t}}{1+\frac{t}{n}}.\mathcal{X}_{[0,n]}(t)$.

On a:

i. *la suite* $(g_n(t))_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $[0, +\infty[$.

ii. *la suite* $\left(g_n(t)\right)_n$ *converge simplement vers la fonction:*
$g(t) = e^{-t}$ *qui est une fonction continue sur* $[0, +\infty[$ *(car* $lim_{n\to+\infty}\mathcal{X}_{[0,n]}(t) = 1$ *.*

iii. *De plus,* $(\forall t \in [0, +\infty[)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $|g_n(t)| \leq e^{-t} = h(t)$ *avec h est continue et intégrable sur* $[0, +\infty[$ *.*

Donc, d'après (i), (ii), (iii) et le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty}t_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

f. *Pour* $x_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}sin^n x dx$,
la suite de fonctions $f_n(x) = e^{-x}sin^n x$ *est majorée par* $g(x) = e^{-x}$ *qui est continue et intégrable sur* $[0, +\infty[$.
De plus, la suite $\left(f_n(x)\right)_n$ *converge simplement vers la fonction:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[, tel\ que \quad k \in \mathbb{N} \\ e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} & si \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ tel\ que \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

qui est une fonction continue par morceaux sur
$]0, +\infty[\setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}\right\}$.
Donc, d'après le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty}x_n = 0$$

Exercice 2 :

a. *Etudions la limite de l'intégrale:* $I_n = \int_0^1 f(x^n)dx$
Posons $g_n(x) = f(x^n)$ $avec\ n \in \mathbb{N}\ et\ x \in [0,1]$.

i. *Comme f est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *et* $lim_{n\to+\infty}x^n = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0,1[\\ 1 & si \quad x = 1 \end{cases}$

alors, $lim_{n\to+\infty}g_n(x) = \begin{cases} f(0) & si \quad x \in [0,1[\\ f(1) & si \quad x = 1 \end{cases}$

ii. *De plus, comme f est bornée sur* $\mathbb{R}^+$ *alors*

$$\exists M > 0\ tel\ que\ \forall n \in \mathbb{N}\ et\ \forall x \in [0,1]: |f(x^n)| \leq M = h(x)$$

avec h est une fonction continue et intégrable sur $[0,1]$.
D'où, grâce au théorème de convergence dominée, on aboutit à:

$$lim_{n\to+\infty}I_n = \int_0^1 f(0)dx = f(0)$$

b. *Etudions la limite de l'intégrale:* $J_n = \int_0^{+\infty} nf(x)e^{-nx}dx$

Comme pour les suites z_n *et* t_n *de l'exercice précédent, on effectue le changement de variables* $t = nx$ *et on obtient:*

$dt = ndx$ *et* $\begin{cases} x = 0 \\ x \to +\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t \to +\infty \end{cases}$

Par suite, $J_n = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-t}dt.$

Posons $g_n(t) = f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-t} \quad pour \quad n \in \mathbb{N}^* \; et \; t \in [0, +\infty[$.

i. *La suite* $(g_n(t))_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $[0, +\infty[$.

ii. *La suite* $(g_n(t))_n$ *converge simplement vers* $g(t) = f(0)e^{-t}$*car f est continue sur* $[0, +\infty[$.

iii. *De plus,* $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad et \quad \forall t \in [0, +\infty[: |g_n(t)| \leq Me^{-t} = h(t)$

avec h est une fonction continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Finalement, d'après le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty}J_n = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-t}dx = [-f(0)e^{-t}]_0^{+\infty} = f(0)$$

c. *Etudions la limite de* $K_n = \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx.$

Par le même changement de variables, $t = nx$, K_n *devient:*

$$K_n = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1 + t^2}dt = \int_0^{+\infty} g_n(t)dt \quad avec: \; g_n(t) = \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1 + t^2}$$

i. *La suite* $(g_n(t))_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $[0, +\infty[$.

ii. *Comme f est continue sur* $[0, +\infty[$, *alors la suite* $(g_n(t))_n$ *converge simplement vers* $g(t) = \frac{f(0)}{1+t^2}$.

iii. *De plus,* $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad et \quad \forall t \in [0, +\infty[: |g_n(t)| \leq \frac{M}{1+t^2} = h(t)$

avec h est une fonction continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

D'où, d'après (i), (ii), (iii) et le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty}K_n = \int_0^{+\infty} g(t)dt = f(0).[Arctant]_0^{+\infty} = f(0)\frac{\pi}{2}$$